

Lezione 1

Prerequisiti: Numeri reali: assiomi ed operazioni. Piano cartesiano. Funzioni trigonometriche.

I numeri complessi

Nell'attuale teoria dei numeri complessi confluiscono due fondamentali idee, una aritmetica, l'altra geometrica. La prima, risalente all'opera *L'Algebra* (1572) del matematico bolognese Rafael Bombelli, consiste nell'introdurre un "numero immaginario" (da lui chiamato *più di meno*) il cui quadrato sia uguale a -1 . La seconda, dovuta al matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), prevede di uscire dalla retta reale, e di invadere il piano al fine di trovare una radice ad un qualsiasi polinomio reale di grado positivo. Tali sono le origini storiche del contenuto di questa lezione.

Nel prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si definiscono le seguenti due operazioni:

- una *somma*, ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- un *prodotto*, ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

La somma gode delle seguenti proprietà:

- (a) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$ (l'elemento $(0, 0)$ è lo *zero*);
- (b) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$ (l'elemento $(-a, -b)$ è l'*opposto* di (a, b) , indicato anche con $-(a, b)$);
- (c) per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$ (la somma è *commutativa*);
- (d) per ogni $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $(a, b) + ((c, d) + (e, f)) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$ (la somma è *associativa*).

Il prodotto gode delle seguenti proprietà:

- (e) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$ (l'elemento $(1, 0)$ è l'*uno*);
- (f) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b) \neq (0, 0)$,

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \cdot (a, b) = (1, 0)$$

(l'elemento $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ è l'*inverso* di (a, b) , indicato anche con $(a, b)^{-1}$);

- (g) per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$ (il prodotto è *commutativo*);
- (h) per ogni $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) = ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f)$ (il prodotto è *associativo*).

Inoltre vale la seguente proprietà:

- (i) per ogni $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$ (il prodotto è distributivo rispetto alla somma).

Esercizio 1.1* Verificare le proprietà (a)-(i).

Svolgimento: Effettuiamo alcune delle verifiche, lasciando le rimanenti al lettore.

(c) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Allora

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b),$$

ove la prima e la terza uguaglianza derivano dalla definizione di somma in $\mathbb{R}^2$, mentre la seconda è conseguenza della proprietà commutativa della somma in $\mathbb{R}$.

(f) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b) \neq (0, 0)$. Allora

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) &= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) = \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0), \end{aligned}$$

ove la prima uguaglianza segue dalla definizione di prodotto in $\mathbb{R}^2$, mentre la seconda e la terza dalle proprietà delle operazioni in $\mathbb{R}$. Analogamente si prova l'identità per il prodotto con i fattori scambiati.

(h) Siano $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) \end{aligned}$$

Definizione 1.2 L'insieme $\mathbb{R}^2$, dotato delle operazioni di somma e prodotto sopra definite, si dice *campo complesso*, e lo si denota $\mathbb{C}$. I suoi elementi si dicono *numeri complessi*.

Vedremo più avanti il significato della parola *campo*. Il nostro prossimo obiettivo è vedere il campo complesso come un'estensione del campo reale: si tratta di identificare determinati numeri complessi con numeri reali ed osservare che, tra essi, le operazioni di somma e di prodotto sopra definite coincidono con quelle di somma e di prodotto definite per i numeri reali. Ciò risulterà dalle seguenti considerazioni.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, identifichiamo il numero complesso $(a, 0)$ col numero reale a . Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la somma di numeri reali $a + b$ si identifica con la somma di numeri complessi

$(a, 0) + (b, 0)$, ed il prodotto di numeri reali ab si identifica con il prodotto di numeri complessi $(a, 0) \cdot (b, 0)$. In effetti, "i conti tornano", in quanto

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0).$$

Potremo così scrivere a al posto di $(a, 0)$. Più avanti, nella Lezione 5, saremo in grado di dare a queste considerazioni una veste più formale e rigorosa.

All'interno di $\mathbb{C}$, distinguiamo, inoltre, un particolare elemento. Si ha

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Quindi, stante l'identificazione introdotta sopra, $(0, 1)$ è un numero complesso il cui quadrato è uguale al numero reale -1 . Lo si chiama *unità immaginaria* e lo si indica con i .

Osservazione 1.3 Anche il quadrato di $-i$ è uguale a -1 , infatti

$$(0, -1)^2 = (0, -1) \cdot (0, -1) = (0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1), 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0) = (-1, 0).$$

I numeri i e $-i$ sono quelli che Bombelli chiamava, rispettivamente, *più di meno* e *meno di meno*.

Per ogni $(a, b) \in \mathbb{C}$, si ha

$$(a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Pertanto, il numero complesso $z = (a, b)$ si può scrivere nella forma

$$a + bi \quad \text{oppure} \quad a + ib.$$

Questa si dice *forma algebrica* del numero complesso z . Il numero reale a si dice *parte reale*, il numero reale b si dice *parte immaginaria*. Si scrive

$$a = \operatorname{Re}(z); \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Si ha $(a, b) \in \mathbb{R}$ se e solo se $b = 0$; quindi i numeri reali si identificano con i numeri complessi aventi parte immaginaria nulla.

I numeri complessi aventi parte reale nulla si dicono *immaginari puri*.

Esercizio 1.4 Trovare due numeri complessi il cui quadrato sia uguale a -2 .

Svolgimento: Tali numeri sono $\sqrt{2}i$ e $-\sqrt{2}i$. Infatti

$$(\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2, \quad (-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2.$$

Più in generale, le radici quadrate del numero reale negativo a sono $i\sqrt{-a}$ e $-i\sqrt{-a}$.

Osservazione 1.5 Scrivendo i numeri complessi nella forma algebrica, le operazioni tra numeri complessi si possono effettuare più agevolmente che non applicando, a memoria, le definizioni di somma e di prodotto date all'inizio di questa lezione. Ad esempio, calcoliamo il prodotto dei numeri complessi $a+bi$ e $c+di$:

$$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Qui abbiamo utilizzato le proprietà delle operazioni di somma e di prodotto, insieme all'identità $i^2 = -1$, e alla caratterizzazione dei numeri reali all'interno del campo complesso.

Esempio 1.6 Presentiamo alcuni numeri complessi in forma algebrica, indicando, nella seguente tabella, la parte reale e la parte immaginaria.

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
$0 = 0 + 0 \cdot i$	0	0
$1 = 1 + 0 \cdot i$	1	0
i	0	1
$-i$	0	-1
$2 - \frac{1}{3}i$	2	$-\frac{1}{3}$
$\sqrt{2} + 7i$	$\sqrt{2}$	7
$-1 + 2i$	-1	2

Si noti che lo zero e l'uno di $\mathbb{C}$ coincidono, rispettivamente, con i numeri reali 0 e 1.

Nell'Esercizio 1.4 abbiamo determinato le radici del polinomio reale di secondo grado $f(x) = x^2 + 2$, ossia le soluzioni dell'equazione quadratica $x^2 + 2 = 0$. Generalizziamo questo esercizio, estendendolo ad ogni equazione quadratica reale.

Esercizio 1.7 Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, ove $a \neq 0$. Trovare le soluzioni dell'equazione quadratica

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Svolgimento: Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, le soluzioni sono

- se $\Delta \geq 0$,

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

(reali, inoltre coincidenti se $\Delta = 0$).

- se $\Delta < 0$,

$$x_1 = -\frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

complesse non reali.

In generale, le soluzioni sono i numeri della forma $-\frac{b+\delta}{2a}$, ove δ è una radice quadrata del discriminante Δ .

Quando il discriminante è negativo, le soluzioni hanno la stessa parte reale $-\frac{b}{2a}$, ma parti immaginarie che sono una l'opposto dell'altra: $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Due numeri complessi legati da questa relazione prendono un nome particolare.

Definizione 1.8 I numeri complessi z_1 e z_2 si dicono (*complessi*) *coniugati* se $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ e $\operatorname{Im}(z_1) = -\operatorname{Im}(z_2)$. Si dice anche che z_1 è il (*complesso*) *coniugato* di z_2 , e viceversa.

Dunque, se $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, il suo complesso coniugato è $a - bi$. Quest'ultimo si indica anche con $\bar{z}$.

Proposizione 1.9 (*Proprietà del complesso coniugato*) Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Allora valgono le seguenti proprietà.

- a) $\overline{\bar{z}} = z$.
- b) z è un numero reale se e solo se $z = \bar{z}$.
- c) z è un numero immaginario puro se e solo se $\bar{z} = -z$.
- d) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$.
- e) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.
- f) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- g) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- h) $z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$.

Dimostrazione: Proviamo solo g), lasciando al lettore la verifica delle rimanenti proprietà. Siano $z = a + bi$, $w = c + di$, ove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i.$$

e, d'altra parte,

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{a + bi} \cdot \overline{c + di} = (a - bi)(c - di) = ac - bd + (-ad - bc)i.$$

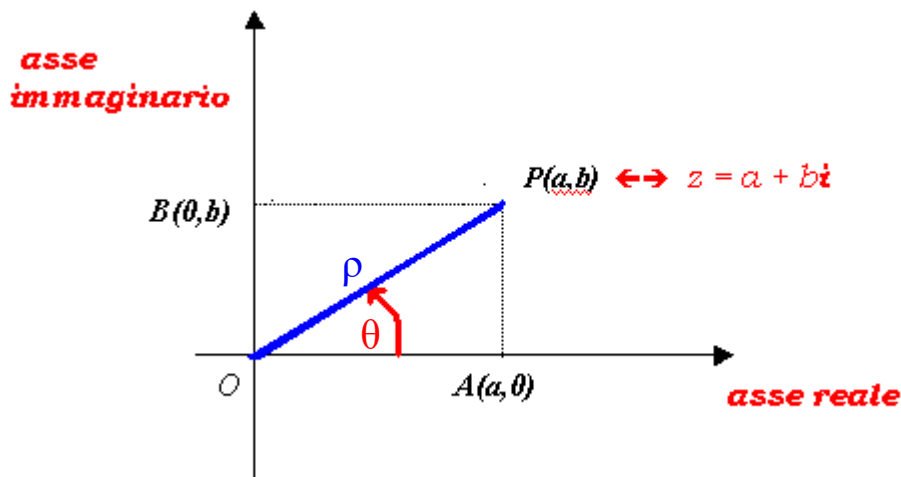
Vale dunque l'uguaglianza voluta. $\square$

Introduciamo ora la rappresentazione dei numeri complessi nel piano. Il *piano di Gauss* è il piano cartesiano, in cui l'asse delle ascisse prende il nome di *asse reale*, l'asse delle ordinate prende il nome di *asse immaginario*, e si identifica, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, il punto di coordinate (a, b) con il numero complesso $a + bi$. In questo modo, lo zero è associato all'origine, il numero reale a al punto

dell'asse reale di ascissa a , il numero immaginario puro bi al punto dell'asse delle ordinate di ascissa b .

Osserviamo che ogni punto P distinto dall'origine è individuato univocamente da due grandezze geometriche:

- la distanza euclidea di P dall'origine;
- l'ampiezza dell'angolo che l'asse reale deve percorrere, ruotando intorno all'origine in senso antiorario, per sovrapporsi alla retta congiungente l'origine ed il punto P .



Detto z il numero complesso associato a P , la prima grandezza si dice *modulo* di z , denotato $|z|$, la seconda si dice *argomento* o *anomalia* di z , denotato $\arg(z)$. Quest'ultimo è definito a meno di multipli interi dell'angolo giro, ossia a meno di $2k\pi$, ove $k \in \mathbb{Z}$. Detto ρ il modulo di z e detto ϑ l'argomento di z , si scrive

$$z = [\rho, \vartheta].$$

Questa si dice la *forma trigonometrica* del numero complesso z . Osserviamo che

$$[\rho, \vartheta] = [\rho', \vartheta'] \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \rho = \rho' \\ \vartheta = \vartheta' + 2k\pi \end{cases} \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}$$

Quindi, due forme trigonometriche rappresentano lo stesso numero complesso se e solo se i moduli sono uguali e gli argomenti differiscono per un multiplo intero di 2π (*criterio di uguaglianza per le forme trigonometriche*).

La forma trigonometrica è legata alla forma algebrica $z = a + bi$ dalle seguenti identità:

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos \vartheta, \\ b &= \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Pertanto

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta). \quad (1)$$

Inoltre si ha

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Esempio 1.10 Determiniamo le forme trigonometriche di alcuni numeri complessi, assegnati in forma algebrica.

a) $z = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right];$

b) $z = -i = \left[1, \frac{3\pi}{2}\right];$

c) $z = 1 = [1, 0];$

d) $z = -3 = [3, \pi];$

e) $z = 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right];$

Esercizio 1.11 Determinare la forma algebrica del numero complesso $z = \left[2, \frac{\pi}{6}\right].$

Svolgimento: Si ha, in base alla (1),

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

Esercizio 1.12 Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:

a) $1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$

b)* $(1 + i)^2$

c)* $(1 + i)(1 - i)$

d)* $2 + 3i^2 - 4i^3$

e)* $(2 + 3i)(4 - 7i).$

Svolgimento: Svolgiamo solo a). Si ha

$$1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = 1 - 1 - i + 1 + i = 1,$$

il cui modulo è 1.

La forma trigonometrica è particolarmente utile nel calcolo del prodotto di numeri complessi. Siano dati i numeri complessi $z = [\rho, \vartheta], w = [\sigma, \varphi].$ Allora

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \cdot \sigma(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho\sigma((\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi) + i(\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi)) \\ &= \rho\sigma(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)) \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$[\rho, \vartheta] \cdot [\sigma, \varphi] = [\rho\sigma, \vartheta + \varphi]. \quad (2)$$

Il prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica si effettua, dunque, moltiplicando i moduli e sommando gli argomenti. Questa proprietà suggerisce la cosiddetta *forma esponenziale* di un numero complesso:

$$z = \rho e^{i\vartheta}.$$

Rispetto a questa forma, la (2) si scrive nel modo seguente:

$$\rho e^{i\vartheta} \cdot \sigma e^{i\varphi} = \rho \sigma e^{i(\vartheta+\varphi)}. \quad (3)$$

In questa uguaglianza ritroviamo il modo in cui, nel campo reale, vengono moltiplicate le potenze aventi la stessa base.

Dalla (2) e dalla (3) seguono, con un facile ragionamento induttivo, le formule per l'elevamento alla potenza n -esima di un numero complesso in forma trigonometrica ed in forma esponenziale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$[\rho, \vartheta]^n = [\rho^n, n\vartheta]. \quad (4)$$

e

$$(\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{in\vartheta}. \quad (5)$$

Possiamo utilizzare, indifferentemente, la (4) o la (5) per estrarre le radici n -esime da un numero complesso non nullo.

Definizione 1.13 Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Si dice *radice n -esima* del numero complesso z ogni numero complesso w tale che $w^n = z$.

Proposizione 1.14 (*Formule di De Moivre*). Sia z un numero complesso non nullo, di modulo ρ ed argomento ϑ . Allora z ha esattamente n radici n -esime, date dalle seguenti formule:

$$\text{- (forma trigonometrica)} \quad x_k = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right] \quad (k = 0, \dots, n-1);$$

$$\text{- (forma esponenziale)} \quad x_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Dimostrazione: Utilizzeremo la notazione esponenziale. Proviamo anzitutto che, per ogni $k = 0, \dots, n-1$, x_k è una radice n -esima di $z = \rho e^{i\vartheta}$. In effetti si ha, in base alla (5),

$$x_k^n = \left(\sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}} \right)^n = \rho e^{i(\vartheta + 2k\pi)} = \rho e^{i\vartheta} = z.$$

Proviamo quindi che ogni radice n -esima di z è uguale ad uno degli x_k . Sia w una radice n -esima di z , $w = \sigma e^{i\varphi}$. Allora, sempre in base alla (5), si ha

$$w^n = (\sigma e^{i\varphi})^n = \sigma^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\vartheta}.$$

Dall'ultima uguaglianza, che traduce la condizione $w^n = z$, segue, confrontando i moduli e gli argomenti secondo il criterio di uguaglianza per le forme trigonometriche,

$$\begin{cases} \sigma^n = \rho \\ n\varphi = \vartheta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z},$$

ossia

$$\begin{cases} \sigma = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$

Sia ora r il resto della divisione di k per n . Allora $r \in \{0, \dots, n-1\}$, e $k = qn + r$ per un opportuno $q \in \mathbb{Z}$. Segue che

$$\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} = \frac{\vartheta + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\vartheta + 2r\pi}{n} + 2q\pi.$$

Dunque è indifferente prendere, come argomento, $\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$ oppure $\frac{\vartheta + 2r\pi}{n}$. Segue che

$$w = \sigma e^{i\varphi} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\vartheta + 2r\pi}{n}} = x_r.$$

Abbiamo così provato che le formule di De Moivre forniscono tutte le radici n -esime di z .

Proviamo allora che i numeri x_k sono a due a due distinti (e quindi sono esattamente n). Siano

$k, k' \in \{0, \dots, n-1\}$, $k \neq k'$. Allora gli argomenti di x_k e $x_{k'}$ differiscono per il numero

$$\frac{2(k - k')\pi}{n} = \frac{k - k'}{n} 2\pi, \text{ che non è un multiplo intero di } 2\pi : \text{ infatti}$$

$$-(n-1) \leq k - k' \leq n-1, \quad \text{e} \quad k - k' \neq 0,$$

per cui $k - k'$ non è divisibile per n , e, di conseguenza, $\frac{k - k'}{n}$ non è un intero. In base al criterio di uguaglianza per le forme trigonometriche segue che $x_k \neq x_{k'}$, come volevasi. $\square$

Esercizio 1.15* Calcolare le radici quadrate, cubiche, quarte e quinte di 1.

Svolgimento: Applichiamo le formule di De Moivre a $z = 1 = [1, 0]$, in successione, per $n = 2, 3, 4, 5$.

Per $n = 2$ otteniamo le radici quadrate, che sono

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{i \frac{0+0\pi}{2}} = e^{i0} = 1, \\ x_1 &= e^{i \frac{0+2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1. \end{aligned}$$

Ritroviamo le radici a noi già note.

Per $n = 3$ otteniamo le radici cubiche, che sono

$$\begin{aligned}x_0 &= e^{i\frac{0+0\cdot\pi}{3}} = e^{i0} = 1, \\x_1 &= e^{i\frac{0+2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\x_2 &= e^{i\frac{0+4\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Per $n = 4$ otteniamo le radici quarte, che sono

$$\begin{aligned}x_0 &= e^{i\frac{0+0\cdot\pi}{4}} = e^{i0} = 1, \\x_1 &= e^{i\frac{0+2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \\x_2 &= e^{i\frac{0+4\pi}{4}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \\x_3 &= e^{i\frac{0+6\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.\end{aligned}$$

A quelle già note, che sono 1 e -1 , si sono aggiunte l'unità immaginaria ed il suo opposto. D'altronde sappiamo che

$$(-i)^4 = i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Il calcolo delle radici quinte è lasciato al lettore.

Esercizio 1.16* Calcolare

- a) le radici seste di $1+i$,
- b) le radici quarte di $\sqrt{3}+i$.